SS05

AUFGABE:

Bilden Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen:

Produktregel: $u = x^3$ $v = \ln x$

$u' = 3x^2$ $v' = \frac{1}{x}$

1 $f(x) = x^3 \ln x$ **Lösung:**

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$= 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 3x^2 \cdot \ln x + x^2$$
$$= x^2(3 \ln x + 1)$$

2 $f(x) = \frac{3x^4 - 7x^3}{2e^x}$ $\frac{u}{v}$ **Lösung:**

Quotientenregel

$u' = 12x^3 - 21x^2$

$v' = 2e^x$

$$y' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(12x^3 - 21x^2) \cdot 2e^x - (3x^4 - 7x^3) \cdot 2e^x}{(2e^x)^2}$$

$$y' = \frac{\cancel{2e^x} \cdot (-3x^4 + 19x^3 - 21x^2)}{(\cancel{2e^x}) \cdot (2e^x)}$$

$$y' = \frac{x^2(-3x^2 + 19x - 21)}{2e^x}$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix für die Funktion

$f(x;y) = 5x^2y^3 - 6xy + 2x - 3y$

Lösung:

$f'_x = 10xy^3 - 6y + 2$

$f'_y = 15x^2y^2 - 6x - 3$

$f''_{xx} = 10y^3$

$f''_{xy} = 30xy^2 - 6$

$f''_{yx} = 30xy^2 - 6$

$f''_{yy} = 30x^2y$

$$H = \begin{pmatrix} 10y^3 & 30xy^2 - 6 \\ 30xy^2 - 6 & 30x^2y \end{pmatrix}$$

$$H = 10y^3 \cdot 30x^2y - (30xy^2 - 6)^2$$

$$H = 300x^2y^4 - [900x^2y^4 - 180xy^2 - 180xy^2 + 36]$$

$$H = 300x^2y^4 - 900x^2y^4 + 360xy^2 - 36$$

$$H = -600x^2y^4 + 360xy^2 - 36 \quad |:36$$

$$H = -16\tfrac{2}{3}x^2y^4 + 10xy^2 - 1$$

$$H = xy^2(-16\tfrac{2}{3}xy^2 + 10) - 1$$

2. AUFGABE:

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 4x - 21}$$

Berechnen Sie

1. den maximalen Definitionsbereich,
2. eventuelle Polstellen,
3. eventuelle Lücken der Funktion. Definieren Sie ggf. die Lücken der Funktion nachträglich.

3. AUFGABE:

Ein Unternehmen stellt durch Marktuntersuchungen fest, dass das Verhalten der Marktteilnehmer auf dem Markt für ein bestimmtes Gut durch die Nachfragefunktion

$$P_N(x) = 30 - 0{,}1\,x$$

beschrieben werden kann.

1. Berechnen Sie die Nachfragemenge bei einem Preis von 5 GE.
2. Berechnen Sie den Prohibitivpreis und die Sättigungsmenge.

Bei einem Preis von 25 GE werden 50 ME; bei einem Preis von 35 GE werden 100 ME angeboten.

3. Berechnen Sie die Angebotsfunktion.
4. Berechnen Sie das Marktgleichgewicht (Angabe von Preis und Menge).

$5 = 30 - 0{,}1x \quad |-5$

$0 = 25 - 0{,}1x \quad |+0{,}1x$

$0{,}1x = 25 \quad |:0{,}1$

$x = 250$ Nachfragemenge

2) $x = 0$

$P_N(0) = 30 - 0{,}1 \cdot 0$

$P_N(0) = 30$ Prohibitivpreis

$y = 0$

$0 = 30 - 0{,}1x \quad |+0{,}1x$

$0{,}1x = 30 \quad |:0{,}1$

$x = 300$ Sättigungsmenge

3) $y = mx + b$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{25 - 35}{50 - 100} = \frac{-10}{-50} = 0{,}2$$

$25 = 0{,}2 \cdot 50 + b \quad |-10$

$b = 15 \longrightarrow P_A(x) = 0{,}2\,x + 15$

4) $0{,}2x + 15 = 30 - 0{,}1x \quad |-15$

$0{,}2x = 15 - 0{,}1x \quad |+0{,}1x$

$0{,}3x = 15$

$x = 50$

$30 - 0{,}1 \cdot 50 = y$

$y = 25$

MG (50/25)

4. AUFGABE:

Die Gewinnfunktion und die Preis-Absatz-Funktion p eines Angebotsmonopolisten sind durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$G(x) = -x^3 - 63x^2 + 705x - 1.150$$

und

$$p(x) = -70x + 840$$

Das Unternehmen kann maximal 12 ME/Tag herstellen.

1. Bestimmen Sie die Menge, bei der maximaler Erlös erzielt wird.
2. Die Gewinnschwelle liegt bei 2 ME. Berechnen Sie die Gewinngrenze.
3. Berechnen Sie die Produktionsmenge, bei der der Gewinn maximal wird und ermitteln Sie die Höhe des maximalen Gewinns.
4. Geben Sie die Koordinaten des Cournotschen Punktes an.
5. Wie groß sind die Stückkosten, wenn 10 Stück produziert werden?
6. Berechnen Sie die kurzfristige Preisuntergrenze.

1) $E(x) = -70x^2 + 840x$

$E'(x) = -140x + 840$

$0 = -140x + 840 \quad | -840$

$-840 = -140x \quad | :(-140)$

$\underline{\underline{x = 6}}$

2) $G(x) = -x^3 - 63x^2 + 705x - 1.150$

$0 = [-x^3 - 63x^2 + 705x - 1.150] : (x-2) = -x^2 - 65x + 575$

$\underline{-x^3 + 2x^2}$

$-65x^2 + 705x - 1.150$

$\underline{-65x^2 + 130x}$

$575x - 1.150$

$\underline{575x - 1.150}$

0

Null setzen

$0 = -x^2 - 65x + 575 \quad | \cdot (-1)$

$0 = x^2 + 65x - 575$

$x_{1/2} = -32,5 \pm \sqrt{(32,5)^2 + 575}$

$x_1 = -32,5 - 40,3887 = -72,8887$

$x_2 = -32,5 + 40,3887 = 7,8887$ ← Gewinngrenze

4. Aufgabe

3.) G_{MAX}

$$G'(x) = -3x^2 - 126x + 705 \qquad | : (-3)$$

$$x_{1/2} = x^2 + 42x - 235$$

$$x_{1/2} = -21 \pm \sqrt{(-21)^2 + 235}$$

$$x_1 = -21 - 26 = \underline{\underline{-47}}$$

$$x_2 = -21 + 26 = \underline{\underline{5}}$$

$$G(x) = -x^3 - 63x^2 + 705x - 1.150$$

$$G(5) = -5^3 - 63 \cdot 5^2 + 705 \cdot 5 - 1.150$$

$$G(5) = -125 - 1575 + 3525 - 1.150$$

$$G(5) = \underline{\underline{675}}$$

$$G_{MAX}(5 / 675)$$

4. Aufgabe

G_{MAX} (5 / 675)

einsetzen

4.) Cournotschen Punkt

$G''(x) = -6x - 126$

$G''(5) = -6 \cdot 5 - 126$

$G''(5) = -156 < 0 \rightarrow$ MAX!

$p(x) = -70x + 840$

$p(5) = -70 \cdot 5 + 840$

$p(5) = 490$

Cournotschen Punkt (5 / 490)

5.) Stückkosten bei 10 Stk

$E(x) = p(x) \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = [-70x^2 + 840x] - [-x^3 - 63x^2 + 705x - 1.150]$

$K(x) = -70x^2 + 840x - x^3 + 63x^2 - 705x + 1.150$

$K(x) = x^3 - 7x^2 + 135x + 1.150 \quad | : x$

$k(x) = x^2 - 7x + 135 + \frac{1150}{x}$

$k(10) = 10^2 - 7 \cdot 10 + 135 + \frac{1150}{10}$

$k(10) = 280$

6.) kurzfristige Preisunteigrenze

$k_{var}(x) = x^3 - 7x^2 + 135x \quad | : x$

$k_{var}(x) = x^2 - 7x + 135$

$k'(x) = 2x - 7$

$0 = 2x - 7 \quad | -2x \quad | \cdot (-1)$

$2x = 7 \quad | : 2$

$x = 3,5$

$k_{var}(3,5) = x^2 - 7x + 135$

$k_{var}(3,5) = 3,5^2 - 7 \cdot 3,5 + 135$

$k_{var}(3,5) = 122,75$

B (3,5 / 122,75)

5. AUFGABE: ⓧ diesmal nicht

Ein Unternehmen stellt ein Produkt mit Hilfe von zwei substituierbaren Produktionsfaktoren X und Y her. Von den beiden Einsatzgütern werden x ME bzw. y ME verwendet. Das Produktionsniveau von 2 ME des Endproduktes wird durch die Isoquante mit der Funktionsgleichung x y = 2 beschrieben. Die Preise für die Einsatzgüter betragen 3GE/ME für das Gut X und 6 GE/ME für Gut Y.

1. Welche Menge des Produktionsfaktors X muss eingesetzt werden, wenn nur 0,5 ME von Y zur Verfügung stehen?
2. Bestimmen Sie die Minimalkostenkombination, d.h. die Einsatzmengen von X und Y, wenn maximal 36 GE für den Einsatz beider Faktoren zur Verfügung stehen.

1) $2 = x \cdot y$ $\quad y = 0{,}5$

$2 = x \cdot 0{,}5 \quad | :2$

$\underline{\underline{x = 4}}$

2) $z = xy \quad \rightarrow max!$

Zielfkt.

Nebenbeding.: $36 = 3x + 6y \quad | -3x$

$36 - 3x = 6y \quad | :6$

$y = 6 - \frac{1}{2}x$

einsetzen:

$z = x \cdot (6 - \frac{1}{2}x)$

$z = 6x - \frac{1}{2}x^2$

$z' = 6 - x$

$z = 0$ setzen

$0 = 6 - x$

$\underline{\underline{x = 6}}$ Maximum?

$z'' = -1 < 0 \quad \rightarrow$ rel. Max!

$y = 6 - \frac{1}{2}x$

$y = 6 - \frac{1}{2} \cdot 6$

$\underline{\underline{y = 3}}$

oder nach der Methode von "Lagrange"

$z = xy \quad \rightarrow max!$

Nebenfkt: $36 = 3x + 6y$

$36 - 3x - 6y = 0$

$F = z(x,y) + \lambda\,(g(x;y))$

$= xy + \lambda\,(36 - 3x - 6y)$

Klausur

nicht Klausur

I $F'_x = y - \lambda 3 = 0$

II $F'_y = x - \lambda 6 = 0$

III $F'_\lambda = 36 - 3x - 6y = 0$

I $y = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}y$

II $x = 6\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6}x$

I = II setzen

$\frac{1}{3}y = \frac{1}{6}x \quad | \cdot 3$

$y = \frac{1}{2}x$ → in III einsetzen:

III $36 - 3x - 6 \cdot (\frac{1}{2}x) = 0$

$36 - 6x = 0 \quad | +6x$

$36 = 6x \quad | :6$

$x = 6$

$y = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ ← einsetzen ← x