1. AUFGABE.

a) Gegeben ist die Funktion mit $f(x)=\frac{x^2+x+6}{x^2+x-6}$

aa) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen

ab) Geben Sie den Definitionsbereich an, unterscheiden Sie dabei zwischen Polen und Lücken und definieren Sie ggf. nachträglich Werte, die zunächst nicht definiert waren mittels einer ähnlichen Funktion.

Lösung:

$0 = x^2 + x + 6$

$x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{(0{,}5)^2 - 6}$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = \\ x_2 = \end{array}\right\}$ keine Definition möglich

Keine Nullstellen

$\frac{x^2 + x + 6}{(x-2)(x-3)}$ Nullst. / Polstellen

Polstellen:

$0 = x^2 + x - 6$

$x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{(0{,}5)^2 + 6}$

$x_1 = -0{,}5 + 2{,}5 = \underline{\underline{2}}$

$x_2 = -0{,}5 - 2{,}5 = \underline{\underline{-3}}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; -3\}$

b) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion: $f(x)=e^x+\sqrt{x^3+4x}$

Lösung:

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x^3+4x}} \cdot (3x^2+4)$$

oder mit Kettenregel:

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{2}(x^3+4x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3x^2+4)$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x^3+4x}} \cdot (3x^2+4)$$

c) Gegeben ist die Produktionsfunktion mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

und die Nebenbedingung mit

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und bilden Sie alle partiellen ersten Ableitungen.

Lösung:

2. AUFGABE:

Ein Monopolist stellt ein Produkt in zwei Ausführungen her. Bei einem Verkaufspreis von x für das Produkt A bzw. y für das Produkt B ergibt sich die Gesamterlösfunktion in der Form:

$$E(x,y) = 200x + 300y + 10xy - 20x^2 - 15y^2$$

Ermitteln Sie mittels Hesse Determinante die Preise, bei denen der Erlös maximal wird und die Höhe des maximalen Erlöses.

Lösung:

3. AUFGABE:

Die Kostenfunktion eines Monopolisten lautet:

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 800$$

Seine Gewinnfunktion lautet:

$$G(x) = -x^3 - 43x^2 + 610x - 800$$

Berechnen Sie

a) die kurzfristige Preisuntergrenze,
b) den Break-Even-Point, wenn die Gewinngrenze bei x = 10 liegt,
c) das Gewinnmaximum,
d) die Erlösfunktion und die Koordinaten des Cournotschen Punktes.

Lösung:

b)

$$(-x^3 - 43x^2 + 610x - 800) : (x - 10) = -x^2 - 53x + 80$$

$$-(-x^3 + 10x^2)$$

$$-53x^2 + 610x - 800$$

$$-(-53x^2 + 530x) - 800$$

$$80x - 800$$

$$-(80x - 800)$$

$$0$$

zu a) $\frac{K(x)}{x} = k(x)$

$$k(x) = x^2 - 12x + 50 + \frac{800}{x}$$

$$k_v(x) = x^2 - 12x + 50$$

$$0 = -x^2 - 53x + 80 \quad | \cdot (-1)$$

$$0 = x^2 + 53x - 80$$

$$x_{1/2} = -\frac{53}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{53}{2}\right)^2 + 80}$$

$$x_1 = -\frac{53}{2} + 27{,}96873 = \underline{1{,}46873}$$

$$x_2 = -\frac{53}{2} - 27{,}96873 = \underline{\underline{-54{,}46873}}$$

Gewinnschwelle: $\underline{1{,}46}$ $(10 / 1{,}468)$

a) $k_v' = 0$

$$k_v = x^2 - 12x + 50$$

$$k_v' = 2x - 12$$

$$0 = 2x - 12 \quad | +12 \quad | : 2$$

$$x = \underline{\underline{6}}$$

x einsetzen in k_v

$$k_v(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 50$$

$$k_v(6) = \underline{\underline{14}}$$

kurzfristige Preisuntergrenze

$(6 / 14)$

3. AUFGABE: (Fortsetzung)

c) $G(x) = -x^3 - 43x^2 + 610x - 800$

$G'(x) = -3x^2 - 86x + 610$

$0 = -3x^2 - 86x + 610 \quad | :(-3)$

$0 = x^2 + 28,\bar{6} - 203,\bar{3}$

$x_{1/2} = -14,3 \pm \sqrt{(14,3)^2 + 203,\bar{3}}$

$x_1 = -14,3 + 20,19 = \underline{\underline{5,89}}$

$x_2 = -14,3 - 20,19 = \underline{\underline{-34,55}}15869\,1$

in G(x) einsetzen

$G(5,89) =$

$-5,89^3 - 43 \cdot 5,89^2 + 610 \cdot 5,89 - 8$

$\vdots$

$G(5,89) = 1096,803$

hinreichende Bedingung $\rightarrow f(x) \neq 0$

$f''(x) = -6x - 86$

$f''(34,55) = 121,3 > 0$

$f''(5,88) = -121,3 < 0$

$G(Min): -34,55$

$G(Max): (5,88 / 1096,8)$

b) BEP $\Rightarrow$ $G(x) = 0$ setzen

$G(x) = -x^3 - 43x^2 + 610x - 800 \quad | \cdot(-1)$

$0 = x^3 + 43x^2 - 610x + 800$

Polynomdivision

1,555

3d) Erlösfunktion

$G(x) = E(x) - K(x) \quad | + K(x)$

$K(x) + G(x) = E(x)$

$E(x) = -x^3 - 43x^2 + 610x - 800 + x^3 - 12x^2 + 50x + 800$

$E(x) = -55x^2 + 660x$

Koordinaten des Cournotschen Punkt

$G(x) = -x^3 - 43x^2 + 610x - 800$

$G'(x) = -3x^2 - 86x + 610$

$0 = -3x^2 - 86x + 610 \quad | :(-3)$

$0 = x^2 + 28,6667x - 203,3333$

$x_{1/2} = -14,3335 \pm \sqrt{(-14,3335)^2 + 203,3333}$

$x_1 = -14,3335 + 20,2183 = 5,8848$!

$x_2 = -14,3335 - 20,2183 = -34,5518$

$x \rightarrow$ einsetzen in $p(x)$

$p(x) = \frac{E(x)}{x}$

$E(x) = -55x^2 + 660x \quad | : x$

$p(x) = -55x + 660$

$p(5,8848) = -55 \cdot 5,8848 + 660$

$p(5,8848) = 336,336$

Cournotsche Punkt $(5,8848 \,/\, 336,336)$

4. AUFGABE:

Auf einem Markt für Erdöl wird die Erdölmenge gemäß der Funktion

$$P_A(x) = 2x + 20$$

angeboten. Die Abnehmer fragen nach gemäß der Funktion mit

$$p_N(x) = 0{,}5\,(100 - x^2)$$

Berechen Sie

a) den Prohibitivpreis und die Sättigungsmenge,
b) das Marktgleichgewicht,
c) die Produzenten- und die Konsumentenrente.

Lösung:

a) Prohibitivpreis → $x = 0$

$y = 0{,}5\,(100 - 0^2)$

$y = 50$ Preis

~~$P_A(50) = 2 \cdot 50 + 20$~~

~~$P_A(50) = 120$ Menge angeboten~~

Sättigungsmenge → $P_N(x) = 0$

$0 = 0{,}5 \cdot (100 - x^2) \quad | : 0{,}5$

$x^2 = 100 \quad | \sqrt{}$

~~$x_{1/2} = \pm\sqrt{100}$~~

~~$x_1 = -10$~~

~~$x_2 = +10$~~

$X = 10$

b) $P_A(x) = P_N(x)$

$2x + 20 = 0{,}5\,(100 - x^2) \quad | -2x + 20 \quad | \; 0{,}5(100 - x^2)$ ausrechnen

$0 = 50 - 0{,}5x^2 - [2x + 20]$

$0 = 50 - 0{,}5x^2 - 2x - 20$

$0 = -0{,}5x^2 - 2x + 30 \quad | : (-0{,}5)$

$0 = x^2 + 4x - 60$

$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{(2)^2 + 60}$

$x_1 = -2 + 8 = 6$!

$x_2 = -2 - 8 = -10$

$x = 6$ einsetzen in $P_A(x)$ → MG

4b) $x = 6$ einsetzen in $P_A(x)$

$\longrightarrow$ Marktgleichgewicht

$P_A(6) = 2 \cdot 6 + 20$

$P_A(6) = \underline{\underline{32}}$

$$MG(\overset{x}{6} / \overset{y}{32})$$

c) Produzentenrente / Konsumentenrente

$KR = \int_0^{x_n} (50 - 0{,}5x^2)\,dx - x_n \cdot p_n$

$KR = \left[50x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^6 - 192$

$KR = 300 - 36 - 192 = \underline{\underline{72}}$

$PR = x_n \cdot p_n - \int_0^{x_n} (2x + 20)\,dx$

$PR = 192 - \left[x^2 + 20x\right]_0^6$

$PR = 192 - 36 - 120 = \underline{\underline{36}}$